ZUR THEORIE
DER REIBUNG STARRER KÖRPER

INAUGURAL-DISSERTATION
DER MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN
FAKULTÄT DER KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT STRASSBURG
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE VORGELEGT

VON

JULIUS WELLSTEIN
AUS STRASSBURG I. E.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1912

Sonderabdruck
aus dem 61. Bande der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“.
Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Inhalt.

Seite

Einleitung

§ 1. Problemstellung 338

§ 2. Literatur. 340

I. Allgemeiner Teil.

§ 3. Aufstellung der linearen Gleichung 343

§ 4. Hilfsformeln aus der Differentialgeometrie 345

§ 5. Kinematik 348

§ 6. Diskussion der linearen Gleichung 351

§ 7. Die lineare Gleichung für die ebene Bewegung 354

II. Durchführung eines Beispiels.

§ 8. Die Differentialgleichungen des Problems 356

§ 9. Die Anfangsbewegung im Intervalle τ 359

§ 10. Abschätzung des Intervalles τ 361

§ 11. Eintritt der Selbstsperrung 364

Eine genaue Theorie der Reibung wird allen Gebieten der Physik angehören müssen, jede Beschränkung auf engeren Rahmen bedeutet eine Einengung der Gültigkeit der Theorie. Man darf somit von einer *stereodynamischen* Theorie der Reibung keine allzuweite Anwendbarkeit verlangen, und es stellt sich von selbst die Aufgabe ein, bei jedem, doch nur in speziellen Versuchsanordnungen ermittelbaren Reibungsgesetz zu prüfen, inwieweit es sich theoretisch und praktisch allgemeiner verwenden läßt.

Die erste theoretische Untersuchung in diesem Sinne hat Painlevé beim Coulombschen Reibungsgesetze angestellt und gezeigt, daß dieses Gesetz schon in verhältnismäßig einfachen Fällen *prinzipiell* versagt; er hat dann eine neue Theorie aufgestellt, die diesen Mangel nicht zeigt. An diese Mitteilung knüpfen eine Reihe von Abänderungsvorschlägen anderer Autoren an, die zwar in einzelnen Beispielen zum Ziele führen, aber zum Teil eben nur auf spezielle Fälle zugeschnitten sind, teils auch der experimentellen Bestätigung bedürfen; daß die Elastizitätstheorie die Schwierigkeiten bei diesen Problemen in weiterem Umfange beseitigt, ist von vornherein zu erwarten. Man wird jedoch zunächst versuchen müssen, *im Rahmen der Stereodynamik* die Bedingungen aufzusuchen,

unter denen ein Reibungsgesetz wenigstens in bestimmten Gruppen von Problemen stets anwendbar bleibt, und wird nach Möglichkeit die Bedingungen so formulieren, daß sie der experimentell zu ermittelnden Form des Reibungsgesetzes nur geringe Einschränkungen auferlegen.

Einen Vorschlag zu einem solchen Gesetze hat unlängst v. Mises gegeben, und die vorliegende Arbeit will diesen Ansatz auf seine theoretische Durchführbarkeit untersuchen, zugleich aber an einem Beispiel zeigen, daß er mit experimentellen Beobachtungen übereinstimmt und durch sie bestätigt wird.

Einleitung.

§ 1. Problemstellung.

1. Wird ein System von n starren Körpern an Bedingungen gebunden, die die Zahl seiner Freiheitsgrade von $6n$ auf k vermindern mögen, so verwirklicht man bekanntlich die Bedingungen durch sogenannte Reaktionskräfte, die als Unbekannte in das Problem eingehen. Das System heißt *vollkommen*[1]), wenn bei allen virtuellen Verschiebungen die Reaktionen[2]) keine Arbeit leisten. In diesem Falle kann man den Bewegungsverlauf ohne Kenntnis der unbekannten Kräfte darstellen, wenn man sich der sogenannten „Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art" bedient; ihre Zahl ist k, und die „generalisierten Kräfte" enthalten die Reaktionen nicht.

Bei *Systemen mit Reibung* dagegen, wo also die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte nicht verschwindet, lassen sich die Reaktionen nicht eliminieren, im Gegenteile wird ihre *Bestimmung zur Hauptaufgabe.* Zu deren Lösung kann man etwa folgenden Weg einschlagen:

Von den $6n$ Koordinaten q_i $(i = 1, 2, \ldots, 6n)$ der n starren Körper sind nur k von einander unabhängig, die übrigen lassen sich durch diese ausdrücken in der Form:

$$q_\nu = Q_\nu(q_1|q_2|\cdots|q_k) \qquad \nu = k+1, k+2, \ldots, 6n.$$

Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit erhält man hieraus $6n - k$ Gleichungen, die in den $\ddot{q}_i$ linear, in den $\dot{q}_i$ quadratisch sind. Nun führe man die Reaktionen ein und setze als Differentialgleichungen

---

1) Dieser Ausdruck stammt von C. Neumann (Leipz. Ber. 1887, S. 184); *reibungsfrei* heißt das System, wenn man noch die Haftreibung ausschließt. Vgl. Enz. d. math. Wiss. IV 10 (R. v. Mises) Anm. 34.

2) Diese von Painlevé in den „Leçons sur le frottement" S. 2 gegebene Definition faßt den Begriff der Reaktionskraft anders als sonst in der Systemmechanik üblich (vgl. G. Hamel, Math. Annalen **66** S. 380); unter Reaktion ist bei Painlevé die Resultante aus Normaldruck und Reibung zu verstehen.

der Bewegung die Schwerpunkts- und Flächengleichung für jeden der n Körper an. Dies sind, skalar gezählt, je 6 Gleichungen, und man hat in ihnen die $\ddot{q}_i$ linear ausgedrückt durch die Kräfte; diese Werte setze man in die eben gefundenen $6n - k$ Gleichungen ein, wodurch man zur Bestimmung der Reaktionen $6n - k$ *lineare Gleichungen* erhält. Die Zahl der Unbekannten steht noch nicht fest, man wird aber verlangen dürfen, daß es gerade $6n - k$ seien, damit sie sich aus den Gleichungen berechnen lassen.[1]) Um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, nehmen wir nunmehr an: Die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, sollen ausschließlich darin bestehen, daß Körper des Systems andere Körper des Systems oder im Raum feste oder nach gegebenen Gesetzen bewegte Körper berühren, und an den Berührungsstellen sei die relative *Gleitgeschwindigkeit* $\boldsymbol{v}$ der berührenden Körper stets *von Null verschieden*; wir wollen uns im folgenden stets mit der *Gleitreibung* beschäftigen. Als Reaktionskraft hat man dann den *Normaldruck* N in Richtung der Berührungsnormalen $\boldsymbol{n}$, und je nachdem $\boldsymbol{n}$ nach dem betrachteten Körper hinzeigt oder nicht, ist N positiv oder negativ zu nehmen; zur Richtung von $\boldsymbol{v}$ entgegengesetzt ist die *Reibungskraft* R, also stets positiv zu zählen. Zwischen R und N besteht eine gegebene Beziehung, das *Reibungsgesetz* $R = R(N)$.

2. Nunmehr läßt sich die Hauptaufgabe schärfer so aussprechen: Wir haben $6n - k$ Berührungsbedingungen, also ihnen entsprechend $2 \cdot (6n - k)$ Unbekannte N_i und R_i, die an gegebene Ungleichungen $N \gtrless 0$, $R > 0$ geknüpft sind. Zu ihrer Bestimmung stehen zur Verfügung $6n - k$ lineare Gleichungen zwischen den N_i und R_i, sowie $6n - k$ Gleichungen der Form $R_i = R_i(N_i)$. Das Problem lautet:

Haben diese Gleichungen stets endliche, den Ungleichungen genügende Lösungen, oder auch, *welche Bedingungen müssen die Funktionen* $R_i(N_i)$ *erfüllen, damit stets zulässige Lösungen erhalten werden?*

Wir beschränken uns weiterhin auf den Fall $n = 1$, $k = 5$, $6n - k = 1$, betrachten also den *einzelnen starren Körper* $\mathfrak{K}$, *der einer einzigen Berührungsbedingung unterworfen ist.* Es bedeutet keine allzugroße Einschränkung, wenn wir den von $\mathfrak{K}$ dauernd berührten Körper als eine im Raum feste Unterlage F voraussetzen. Es wird sich zeigen, daß schon in diesem Falle die Funktion $R(N)$ weitgehenden Forderungen genügen muß, die z. B. beim Coulombschen Gesetze nicht erfüllt sind; ob sich aus unseren weiteren Überlegungen Schlüsse auf den allgemeinen Fall von n starren Körpern ziehen lassen, bleibe dahingestellt. Unsere Aufgabe hat nunmehr, wenn wir $\boldsymbol{n}$ auf $\mathfrak{K}$ hinzeigen lassen, folgende Form:

1) Andernfalls liegt ein „stereokinetisch unbestimmtes" Problem vor, das sich mit den Mitteln der Mechanik starrer Körper überhaupt nicht lösen läßt.

Man soll untersuchen, für welche Reibungsgesetze $R(N)$ es eine endliche Lösung des Gleichungssystems

$$B \cdot N - C \cdot R = A; \quad R = R(N); \quad N \geqq 0, \quad R \geqq 0$$

gibt, wo A, B, C drei von N und R unabhängige, aus den mechanischen Gleichungen zu bestimmende Größen sind, die nur von der Lage und Gestalt der berührenden Flächen, sowie der Verteilung der Massen und eingeprägten Kräfte abhängen.

An diese Frage knüpft die Painlevésche Kritik an: sie zeigt, daß das Coulombsche Gesetz $R = \text{const} \cdot N$ unter Umständen zu keiner Lösung führt (vgl. § 6). Wie v. Mises angibt, ist die Forderung, für $\mu = \frac{R}{N}$ sei

$$\lim_{N=\infty} \mu = 0,$$

stets hinreichend, eine Lösung zu sichern; es soll also der Reibungskoeffizient μ für hinreichend große Werte von N beliebig klein werden, ohne Rücksicht auf die andern Größen, von denen μ abhängen kann, z. B. die Gleitgeschwindigkeit v.

3. Da man stets nur endliche (nicht zu große) Drucke verwirklichen kann, so liegt die v. Misessche Annahme außerhalb der unmittelbaren Erfahrung, man kann nur indirekt prüfen, ob sie zu solchen Resultaten führt, die mit der Beobachtung übereinstimmen. Nun hat die Untersuchung eines einfachen Problems[1]), bei dem das Coulombsche Gesetz versagt, auf eine Erscheinung aufmerksam gemacht, die man als *Selbstsperrung* bezeichnet: die vorhandene Relativgeschwindigkeit an der Berührungsstelle geht unter kritischen Umständen sehr rasch in den Wert Null über. Hiervon müßte das neue Reibungsgesetz, auf diese Aufgabe angewandt, Rechenschaft geben, und das ist auch tatsächlich der Fall. Wir wollen daher nachweisen, daß mittels unseres Ansatzes

die in 2. formulierte Hauptaufgabe stets lösbar ist (Teil I)

und

bei einem durchgeführten Beispiel die Theorie auf die Selbstsperrung führt (Teil II).

§ 2. Literatur.

1. Die mathematische Durchführung von Problemen der Mechanik mit Berücksichtigung der Reibung stößt auf beträchtliche Schwierigkeiten. Die älteren Autoren haben sich daher in dem Bestreben, die auftretenden Differentialgleichungen in geschlossener Form zu integrieren, auf einfache Beispiele beschränkt. Insbesondere ist von unserem Problem,

1) H. Chaumat [vgl. § 2].

der Bewegung eines starren Körpers auf fester Unterlage, der allgemeine Ansatz nur bis zu der Erkenntnis durchgeführt, daß zur Bestimmung der sechs unbekannten Koordinaten und der beiden Reaktionen N und R ausreichend viele Gleichungen vorhanden sind. Soweit gelangen etwa, um nur die bedeutendsten Namen zu nennen, D. Poisson, Traité de mécanique, chap. III; Deutsche Ausgabe Berlin 1836, 4. Buch; Cournot, Journal f. r. u. a. Math. **5** S. 133, 223; **8** S. 1; C. Neumann, Math. Annalen **27** S. 478 = Leipz. Ber. 1885, doch beschäftigt sich diese Arbeit mehr mit der Wahl passender Parameter, der Umformung der Lagrangeschen Gleichungen usw., kommt somit für unsere Absicht nicht in Betracht. (Vgl. auch Vierkandt, Monatsh. f. Math. u. Phys. **3** S. 31.)

Eine scharfe *Trennung* der beiden Aufgaben: *Bestimmung der Reaktionen* aus den gegebenen Anfangsbedingungen, sowie *Integration der Differentialgleichungen*, ist erst durch die Arbeit von P. Painlevé ermöglicht (Comptes rendus, Paris **121** (1895) S. 112), wo die in § 1 unserer Arbeit schon erwähnte lineare Gleichung zwischen N und R nachgewiesen wird. Mittels dieser Gleichung läßt sich nun jedes Reibungsgesetz auf seine theoretische Brauchbarkeit hin untersuchen, und da hat Painlevé gezeigt, daß in gewissen, gut ausführbaren Fällen das Coulombsche Gesetz keine Bestimmung der Reaktionen gestattet oder sogar auf Zweideutigkeiten führt. (Wir werden diesen Nachweis in § 6 erbringen.) Damit entsteht naturgemäß die Aufgabe, diese Schwierigkeiten durch geeignete Abänderungen der Reibungstheorie zu beheben.

2. Am weitesten geht hierin die von Painlevé selbst aufgestellte neue Theorie der Reibung, die in seinen *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique*, Paris 1895 aufgebaut und in den *Leçons sur le frottement*, Paris 1895 auf die einzelnen Gruppen von gebundenen Bewegungen angewandt wird. Eine kurze Zusammenstellung der wesentlichen Eigenschaften seiner „Reibungskräfte" gibt Painlevé in der Note C. R. **120** 1895, S. 596; eine eingehende, bequem lesbare Darstellung der ganzen Theorie mit Erweiterungen auf beliebige Systeme findet man bei E. Daniele, Il nuovo cimento (5) **7** (1904) S. 109; (5) **9** (1905) S. 174, 266, 289; eine Prüfung der Theorie auf ihre Voraussetzungen und Folgen gibt G. Maggi, Il nuovo cimento (5) **10** (1905) S. 240; (5) **14** (1907) S. 338. Diesen Arbeiten entspricht die kurze Wiedergabe von Painlevés Theorie in der Enzyklop. d. math. Wiss. IV 10 (R. v. Mises) Nr. 6^b. Nach Painlevé (vgl. auch C. R. **140** S. 702) hängt die Reibung wesentlich von der Verteilung der Drucke in der Umgebung der Berührungsstelle ab, oder in anderer Formulierung: seine „Reibungskraft" ist eine empirisch zu ermittelnde Funktion des Normaldruckes N^0 (der bei vollkommen glatter Fläche gelten würde), sowie

aller Systemparameter, der Massenverteilung usw. Diese Annahmen sind zwar frei von den Widersprüchen des Coulombschen Gesetzes, bedürfen aber noch der experimentellen Untersuchung und entfernen sich weit von den in der Stereodynamik üblichen Anschauungen über die Reaktionskräfte.

3. *Gibt man den Begriff des starren Körpers preis,* so bietet die Elastizitätstheorie natürlich eine weitgehende Möglichkeit zur Aufhebung aller Schwierigkeiten. Diesen Weg hat schon Lecornu eingeschlagen, C. R. **140** (1905) S. 635, um bei dem von Chaumat, C. R. **136** (1903) S. 1634, angegebenen und experimentell untersuchten Beispiel der exzentrischen Kreisscheibe auf ebener Unterlage die Theorie den Beobachtungen anzupassen. Er betrachtet die Unterlage als elastisch und erklärt unter dieser Voraussetzung auch die Selbstsperrung. Man muß aber wohl hier der Kritik Painlevés beipflichten, C. R. **140** S. 702, der die Annahmen als willkürlich, mit Rücksicht auf das gewünschte Resultat gemacht, bezeichnet. Dagegen fallen die von Painlevé an derselben Stelle, ferner C. R. **141** S. 401, sowie Lecornu, C. R. **140** S. 847, de Sparre, C. R. **141** S. 310 an anderen Beispielen nachgewiesenen Widersprüche nicht der stereodynamischen Theorie der Reibung zur Last; es handelt sich dabei um Abstraktionen wie: materieller Punkt, gewichtslose Stange, zweiseitige Führung eines Punktes u. a., deren Zulässigkeit bei Reibungsproblemen doch zunächst nachgewiesen werden müßte. Eines der von Painlevé mitgeteilten Beispiele hat dann F. Pfeiffer, diese Zs. f. Math. u. Phys. **58** (1910) S. 273ff. mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie behandelt, und er findet eine befriedigende Übereinstimmung mit seinen Beobachtungen; durch Grenzübergang zu unendlich großem Elastizitätskoeffizienten erhält er dann für den „starren" Körper auch in den kritischen Fällen des Coulombschen Gesetzes eine eindeutige Entscheidung über die eintretende Bewegung, entsprechend dem Standpunkte von Prandtl, Zs. f. Math. u. Phys. **58**, S. 196, der alle Bewegungsprobleme des starren Körpers aus denen des elastischen durch einen Grenzübergang ableiten will, den man i. a. schon an den Differentialgleichungen des Problems, in einzelnen Fällen, wie dem von Pfeiffer behandelten, aber erst an ihren Lösungen vornehmen darf. Einen ähnlichen Gedankengang verfolgt auch de Sparre in seiner Abhandlung: Bull. de la soc. math. de France **34** (1906), in der er zwei Aufgaben mit Hilfe der Elastizitätstheorie löst und dann zeigt, wie das Coulombsche Gesetz, wenigstens angenähert, den Bewegungsverlauf wiedergibt. Die von Klein, Zs. f. Math. u. Phys. **58** S. 186 gegebene Erklärung der Widersprüche des genannten Gesetzes stellt nach den Ausführungen von v. Mises (an derselben Stelle) eine neue

Arbeitshypothese dar, die indessen aus der Theorie sich nicht ableiten läßt. Ganz auf dem Boden der Stereodynamik dagegen steht die Annahme von Lecornu: C. R. **140**, S. 635, der Reibungskoeffizient wachse vom Augenblick der Berührung an von Null ausgehend zu einem Endwerte. Dieser Vorschlag (von de Sparre, C. R. **141**, S. 310 aufgenommen und auf einige Beispiele angewandt) hilft zwar über die Schwierigkeiten des Coulombschen Gesetzes hinweg, unterliegt aber schwerwiegenden Bedenken, die seine experimentelle Bestätigung in Frage stellen; Einwände haben zuerst schon Painlevé, C. R. **141**, S. 401, dann v. Mises, Zs. f. Math. u. Phys. **58**, S. 193 erhoben. Mit der geringsten Zahl neuer Voraussetzungen und in engem Anschluß an die alte Theorie kommt der v. Misessche Ansatz aus, a. a. O. S. 194, der in vorliegender Arbeit näher untersucht wird.

Für weitere Literaturangaben sei auf die Enzyklopädieartikel von P. Stäckel IV 6 Nr. 6, 31, 38 und R. v. Mises IV 10 Nr. 6 verwiesen.

I. Allgemeiner Teil.

§ 3. Aufstellung der linearen Gleichung.

Die in § 1, 1 für den allgemeinen Fall angedeutete Herleitung der linearen Gleichung zwischen den Reaktionen vereinfacht sich in unserem Falle ($n = 1$, $k = 5$) zwar wesentlich, führt aber nicht ohne weiteres zur expliziten Darstellung der Koeffizienten. Wir wollen vielmehr ein Verfahren anwenden, das uns in zwei Schritten zum Ziele führt: Die Komponente der Beschleunigung des eben berührenden Punktes nach der Flächennormalen läßt sich leicht linear durch die Kräfte, also auch die Reaktionen N und R ausdrücken, gleichzeitig aber liefert eine kinematische Untersuchung einen andern Ausdruck für diese Größe (§ 5), womit dann ohne weiteres die gewünschte Beziehung hergestellt ist.

1. Wir führen ein: Das im Raum feste Koordinatensystem O (1, 2, 3) und das mit dem Körper $\mathfrak{K}$ bewegte System G(I, II, III), dessen Achsen Hauptträgheitsachsen des Körpers für den Schwerpunkt G sein sollen. Der Ortsvektor von O nach G sei mit $\mathfrak{x}^*$ bezeichnet, und es bedeute $\mathfrak{x}$ den Ortsvektor von O nach einem beliebigen Punkte des starren Körpers, $\dot{\mathfrak{x}}$ seine Geschwindigkeit. Nach einem bekannten Satze läßt sich $\dot{\mathfrak{x}}$ ausdrücken durch die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{x}}^*$ des Punktes G und die instantane Drehgeschwindigkeit ω um diesen Punkt:

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}^* + \omega \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*). \tag{1}$$

Dabei soll $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ das vektorielle, $\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}$ das skalare Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bedeuten.

Durch Differentiation nach der Zeit folgt:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \ddot{\mathfrak{x}}^* + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)]. \tag{2}$$

Unter $\mathfrak{x}$ soll jetzt speziell der Ortsvektor nach dem Punkte von $\mathfrak{K}$ verstanden werden, der augenblicklich die Fläche F berührt; ist $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen, so erhält man aus (2):

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_n &= \ddot{\xi}^*_n + \boldsymbol{n} | \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) + \boldsymbol{n} | \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)] \\ &= \ddot{\xi}^*_n + \dot{\boldsymbol{\omega}} | (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \wedge \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} | \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier seien noch zwei später gebrauchte Abkürzungen eingeführt: es bedeute $\mathfrak{e}$ den Einheitsvektor in Richtung von $\dot{\mathfrak{x}}$, und es werde:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \wedge \boldsymbol{n} = \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \wedge \mathfrak{e} = \mathfrak{b} \tag{4}$$

gesetzt. Dann hat man:

$$\ddot{\xi}_n = \ddot{\xi}^*_n + \dot{\boldsymbol{\omega}} | \mathfrak{a} + \boldsymbol{n} | \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)]. \tag{3'}$$

2. Es sei $\mathfrak{F}^0$ die Summe der eingeprägten Kräfte, $\mathfrak{M}^0$ ihr Moment in G; fügt man die Reaktionskräfte hinzu, so kommt als Summe *aller äußeren* Kräfte:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 + N \cdot \boldsymbol{n} - R \cdot \mathfrak{e} \qquad (N > 0, R > 0). \tag{5}$$

Moment *aller äußeren* Kräfte in G:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}^0 + N \cdot (\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \wedge \boldsymbol{n} - R(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \wedge \mathfrak{e} \\ &= \mathfrak{M}^0 + N \cdot \mathfrak{a} - R \cdot \mathfrak{b}. \end{aligned} \tag{6}$$

Sind $T_{\mathrm{I}}, T_{\mathrm{II}}, T_{\mathrm{III}}$ die Hauptträgheitsmomente des Körpers, M seine Masse, so drücken sich die Vektoren $\ddot{\mathfrak{x}}^*$ und $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ mittels Schwerpunkts- und Flächengleichung (diese in Form der sog. „Eulerschen Gleichungen") folgendermaßen durch die Kräfte aus:

$$M \ddot{\mathfrak{x}}^* = \mathfrak{F}. \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{I}}\ \dot{\omega}_{\mathrm{I}}\ + (T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{III}}) \omega_{\mathrm{II}}\ \omega_{\mathrm{III}} &= \mathfrak{M}_{\mathrm{I}}, \\ T_{\mathrm{II}}\ \dot{\omega}_{\mathrm{II}}\ + (T_{\mathrm{III}} - T_{\mathrm{I}})\ \omega_{\mathrm{III}} \omega_{\mathrm{I}}\ &= \mathfrak{M}_{\mathrm{II}}, \\ T_{\mathrm{III}} \dot{\omega}_{\mathrm{III}} + (T_{\mathrm{I}}\ - T_{\mathrm{II}})\ \omega_{\mathrm{I}}\ \omega_{\mathrm{II}}\ &= \mathfrak{M}_{\mathrm{III}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} | \mathfrak{a} &\equiv \dot{\omega}_{\mathrm{I}} \mathfrak{a}_{\mathrm{I}} + \dot{\omega}_{\mathrm{II}} \mathfrak{a}_{\mathrm{II}} + \dot{\omega}_{\mathrm{III}} \mathfrak{a}_{\mathrm{III}} \\ &= \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{I}}} \{\mathfrak{M}_{\mathrm{I}} - (T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{III}}) \omega_{\mathrm{II}} \omega_{\mathrm{III}}\} + \cdot + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{III}}}{T_{\mathrm{III}}} \{\mathfrak{M}_{\mathrm{III}} - (T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{II}}) \omega_{\mathrm{I}} \omega_{\mathrm{II}}\}. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Nunmehr geht Gl. (3'), falls man für $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{M}$ die Ausdrücke aus (5) und (6) einsetzt, nach N und R ordnet und das von N und R freie Glied mit $\ddot{\mathfrak{x}}^0_n$ bezeichnet, in folgende Form über:

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = \ddot{\mathfrak{x}}^0_n + N \cdot B - R \cdot C, \tag{10}$$

wo man gesetzt hat:

$$B = \frac{1}{M} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}^2}{T_{\mathrm{I}}} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}^2}{T_{\mathrm{II}}} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{III}}^2}{T_{\mathrm{III}}}, \tag{11}$$

$$C = \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}\mathfrak{b}_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{I}}} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}\mathfrak{b}_{\mathrm{II}}}{T_{\mathrm{II}}} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{III}}\mathfrak{b}_{\mathrm{III}}}{T_{\mathrm{III}}},$$

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n^0 = \frac{\mathfrak{F}_n^0}{M} + \boldsymbol{n}|\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)] \tag{12}$$

$$+ \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{I}}}\{\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}^0 - (T_{\mathrm{II}} - T_{\mathrm{III}})\omega_{\mathrm{II}}\omega_{\mathrm{III}}\} + \cdot + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{III}}}{T_{\mathrm{III}}}\{\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}^0 - (T_{\mathrm{I}} - T_{\mathrm{II}})\omega_{\mathrm{I}}\omega_{\mathrm{II}}\}.$$

Wir werden in § 5 zeigen, daß wegen der Bedingung der Berührung $\ddot{\mathfrak{x}}_n$ ausschließlich von den Geschwindigkeitsparametern $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\boldsymbol{\omega}$, sowie Krümmung und Lage der berührenden Flächen abhängt:

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = Q^{(2)}(\dot{\mathfrak{x}}\ \omega), \tag{13}$$

falls $Q^{(2)}$ eine homogene quadratische Funktion der Komponenten von $\dot{\mathfrak{x}}$ und $\boldsymbol{\omega}$ bedeutet. Damit folgt aus (10), den Nachweis von (13) vorbehalten, die angekündigte lineare Gleichung:

$$N \cdot B - R \cdot C = Q^{(2)} - \ddot{\mathfrak{x}}_n^0 \equiv A, \tag{14}$$

die uns später noch beschäftigen wird.

§ 4. Hilfsformeln aus der Differentialgeometrie.

1. Die feste Fläche F denken wir uns in Parameterdarstellung gegeben:

$$x_i = x_i(u|v)\ (i = 1, 2, 3) \text{ oder kürzer } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u|v). \tag{1}$$

Setzt man

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \boldsymbol{x}_u, \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \boldsymbol{x}_v, \tag{2}$$

so sei der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ in Richtung der Normalen in der bekannten Weise definiert:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u \wedge \boldsymbol{x}_v|}. \tag{3}$$

Wir errichten in zwei benachbarten Punkten (u, v) und $(u + du, v + dv)$, die also auf der Richtung $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_u du + \boldsymbol{x}_v dv$ liegen, die Normalen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{n}'$, bilden die Differenz:

$$d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}' - \boldsymbol{n} \tag{4}$$

und wollen nun untersuchen, wie dieser Vektor $d\boldsymbol{n}$ von dem Vektor $d\boldsymbol{x}$ abhängt. Offenbar kommt es für diesen rein geometrischen Zusammenhang nicht auf die Wahl der Parameter an, und um nicht zu viel Formeln der Flächentheorie heranziehen zu müssen, nehmen wir an, die Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ seien die Krümmungslinien der Fläche. Allgemein ist

$$d\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u} du + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial v} dv, \tag{4'}$$

aber mit unserer Annahme lassen sich jetzt die Vektoren $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial v}$ leicht deuten. Es seien $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ die Einheitsvektoren in den Hauptkrümmungsrichtungen ($\boldsymbol{e}_1$ steht auf $\boldsymbol{e}_2$ senkrecht); errichtet man dann in zwei konsekutiven Punkten von $\boldsymbol{e}_1$ mit dem gegenseitigen Abstand $dx^{(1)}$ die Normalen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{n}'$, so schneiden sie sich, und zwar in dem zu $\boldsymbol{e}_1$ gehörigen Krümmungsmittelpunkt (Radius r_1), gemäß der Definition der Hauptkrümmungsrichtungen; daher liegt der Vektor $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u}\,du$ in der Richtung $\pm \boldsymbol{e}_1$, und da δn der Winkel zwischen den Normalen ist, so hat man $r_1 \cdot \delta n = dx^{(1)}$. Nimmt man den Krümmungsradius positiv oder negativ, je nachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der $+\boldsymbol{n}$ Richtung liegt oder nicht, so erhält man die endgültige Formel, die man durch eine einfache Überlegung, etwa an der Kugel, auf die Richtigkeit des Vorzeichens bestätigt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u}\,du = -\frac{dx^{(1)}}{r_1}\,\boldsymbol{e}_1 \equiv -\frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}}{r_1}.$$

Ein entsprechender Ausdruck gilt für $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial v}\,dv$, und beachtet man, daß $dx^{(1)}$ und $dx^{(2)}$ die rechtwinkligen Projektionen von $d\boldsymbol{x}$ auf die Richtungen $\boldsymbol{e}_1$ bzw. $\boldsymbol{e}_2$ sind, so besteht zwischen der Richtung $d\boldsymbol{x}$ und der Normalenänderung $d\boldsymbol{n}$ nach (4′) der Zusammenhang:

$$d\boldsymbol{n} = -\frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}}{r_1} - \frac{d\boldsymbol{x}^{(2)}}{r_2}. \quad \text{(Formel v. Rodrigues.)} \tag{5}$$

2. Nunmehr sei auch die Oberfläche Φ des bewegten Körpers durch ihre Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ dargestellt:

$$\xi_{\mathrm{I}} = \xi_{\mathrm{I}}(\alpha|\beta) \text{ usw., oder kürzer } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\alpha|\beta).$$

Bezeichnet man mit ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ die Einheitsvektoren in den Krümmungsrichtungen, die zugehörigen Krümmungsradien mit ϱ_{I} und ϱ_{II} und definiert als Einheitsvektor der Normalen:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \backslash \boldsymbol{\xi}_\beta}{\boldsymbol{\xi}_\alpha \backslash \boldsymbol{\xi}_\beta}, \tag{6}$$

so gehört zu der Fortschreitungsrichtung $d\boldsymbol{\xi}$ die Normalenänderung:

$$d\boldsymbol{\nu} = -\frac{d\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{I})}}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{d\boldsymbol{\xi}^{(\mathrm{II})}}{\varrho_{\mathrm{II}}}. \tag{7}$$

Da sich die Flächen im Punkte (u, v) bzw. (α, β) berühren, so stimmen dort ihre Normalenrichtungen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{\nu}$ überein; bezeichnen:

$$\begin{pmatrix} c_{\mathrm{II}} & c_{\mathrm{III}} & c_{\mathrm{IIII}} \\ c_{\mathrm{III}} & c_{\mathrm{IIII}} & c_{\mathrm{IIIII}} \\ c_{\mathrm{IIII}} & c_{\mathrm{IIIII}} & c_{\mathrm{IIIIII}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

die 9 Richtungskosinus des Achsenkreuzes $G(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ gegen $O(1, 2, 3)$ (die Matrix (8) ist im eigentlichen Sinne orthogonal), so hat man als Berührungsbedingungen:

$$x_1 = \mathfrak{x}^*_1 + c_{1\mathrm{II}}\xi_{\mathrm{I}} + c_{1\mathrm{III}}\xi_{\mathrm{II}} + c_{1\mathrm{III}}\xi_{\mathrm{III}}$$

und zwei entsprechende Gleichungen, ferner:

$$n_1 = c_{1\mathrm{II}}\nu_{\mathrm{I}} + c_{1\mathrm{III}}\nu_{\mathrm{II}} + c_{1\mathrm{III}}\nu_{\mathrm{III}}$$

nebst zwei analogen Ausdrücken. Wegen der Beziehung $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = \nu_{\mathrm{I}}^2 + \nu_{\mathrm{II}}^2 + \nu_{\mathrm{III}}^2$ sind dies bei gegebenen $\mathfrak{x}^*_i$ und c (die c hängen aber nur von 3 Parametern, etwa den Eulerschen Winkeln, ab) für die Unbekannten u, v, α, β zusammen 5 Gleichungen. Es besteht also zwischen den $\mathfrak{x}^*_i$ und den c eine Relation, entsprechend den 5 Freiheitsgraden des Körpers; ist diese erfüllt, so ist zu gegebener Lage des Körpers u, v, α, β bestimmt. Damit kennt man aber auch den Winkel φ, den in der Tangentialebene die Richtungen $\boldsymbol{e}_1$ und ε_{I} bilden, und hat dann zur Transformation der Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{a}$ von einem in das andere System der Krümmungsrichtungen die Formeln:

$$\begin{aligned} a^{(\mathrm{I})} &= a^{(1)}\cos\varphi + a^{(2)}\sin\varphi \\ a^{(\mathrm{II})} &= -a^{(1)}\sin\varphi + a^{(2)}\cos\varphi, \text{ oder aufgelöst:} \\ a^{(1)} &= a^{(\mathrm{I})}\cos\varphi - a^{(\mathrm{II})}\sin\varphi \\ a^{(2)} &= a^{(\mathrm{I})}\sin\varphi + a^{(\mathrm{II})}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Will man jetzt die Gleichung (7) in Komponenten nach $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ zerlegen, so setze man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \varkappa_{11} &= \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{II}}}; \quad \varkappa_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{II}}}; \\ \varkappa_{12} &= \varkappa_{12} = \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{II}}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Dann hat man:

$$\begin{aligned} -dv^{(1)} &= \varkappa_{11}d\xi^{(1)} + \varkappa_{12}d\xi^{(2)} \\ -dv^{(2)} &= \varkappa_{21}d\xi^{(1)} + \varkappa_{22}d\xi^{(2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Größen $\varkappa$ haben übrigens folgende Bedeutung: Legt man durch die Fläche Φ Normalschnitte, die der Reihe nach die Richtungen a) $\boldsymbol{e}_1$; b) $\boldsymbol{e}_2$; c) die Halbierungslinie h' des rechten Winkels $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$; d) die zu h' senkrechte Gerade h'' enthalten, so gehören zu ihnen nach dem Eulerschen Satze die Krümmungsradien:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{1}{\varrho_1} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{II}}}; \quad \text{b)}\ \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_{\mathrm{II}}}; \\ &\text{c)}\ \frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2\psi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\sin^2\psi}{\varrho_{\mathrm{II}}}; \quad \text{d)}\ \frac{1}{\varrho''} = \frac{\sin^2\psi}{\varrho_{\mathrm{I}}} + \frac{\cos^2\psi}{\varrho_{\mathrm{II}}}. \end{aligned} \tag{12'}$$

Hier ist $\psi = 45^0 - \varphi$, infolgedessen:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right) = \frac{1}{2}\cos 2\psi\left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{II}}}\right) = \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{\varrho_{\mathrm{II}}}\right);$$

daher haben wir die Beziehungen:

$$(12) \qquad \varkappa_{11} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right); \quad \varkappa_{22} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

4. Zu der Richtung $d\boldsymbol{a}$ gehören die Normalenänderungen:

$$d\boldsymbol{n}^{(1)} = -\frac{d\boldsymbol{a}^{(1)}}{r_1} \quad ; \quad d\boldsymbol{n}^{(2)} = -\frac{d\boldsymbol{a}^{(2)}}{r_2};$$

$$-d\boldsymbol{v}^{(1)} = \varkappa_{11} d\boldsymbol{a}^{(1)} + \varkappa_{12} d\boldsymbol{a}^{(2)}; \quad -d\boldsymbol{v}^{(2)} = \varkappa_{21} d\boldsymbol{a}^{(1)} + \varkappa_{22} d\boldsymbol{a}^{(2)};$$

setzt man

$$(13) \qquad \begin{gathered} k_{11} = -\frac{1}{r_1} + \varkappa_{11} = -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1}; \quad k_{22} = -\frac{1}{r_2} + \varkappa_{22} = -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\varrho_2} \\ k_{12} = k_{21} = \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right), \end{gathered}$$

so folgt für die Differenz $\boldsymbol{\delta} = d\boldsymbol{n} - d\boldsymbol{v}$:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \delta^{(1)} &= k_{11} d\boldsymbol{a}^{(1)} + k_{12} d\boldsymbol{a}^{(2)} \\ \delta^{(2)} &= k_{21} d\boldsymbol{a}^{(1)} + k_{22} d\boldsymbol{a}^{(2)}. \end{aligned}$$

Solange die Determinante $k = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 \neq 0$, lassen sich diese Gleichungen auflösen:

$$(14') \qquad \begin{aligned} k \cdot d\boldsymbol{a}^{(1)} &= \quad k_{22} \delta^{(1)} - k_{12} \delta^{(2)} \\ k \cdot d\boldsymbol{a}^{(2)} &= -k_{21} \delta^{(1)} + k_{11} \delta^{(2)}. \end{aligned}$$

Ist aber $k = 0$, ohne daß alle $k_{\mu\nu} = 0$ sind, so gibt es stets eine nicht verschwindende Lösung der Gleichung (14) nach $d\boldsymbol{a}^{(1)}$ und $d\boldsymbol{a}^{(2)}$ mit $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 0$, und für dieses $d\boldsymbol{a}$ ist $d\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{v}$, oder da $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}$, auch $\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$; in dieser Richtung $d\boldsymbol{a}$ liegen somit mindestens zwei konsekutive Punkte, in denen beide Flächen dieselben Normalen haben, ihre Berührung in jener Richtung ist mindestens von der zweiten Ordnung. Sind dagegen alle $k_{\mu\nu} = 0$, so genügt jede Richtung $d\boldsymbol{a}$ jener Gleichung, d. h. in jeder Richtung findet Berührung von mindestens der zweiten Ordnung statt. Eine einfache Rechnung im Anschluß an die Formeln (12) und (12′) zeigt, daß die $k_{\mu\nu}$ nur dann identisch verschwinden, wenn an der Berührungsstelle beide Flächen

entweder gleiche Hauptkrümmungsrichtungen und zu jeder denselben Krümmungsmittelpunkt

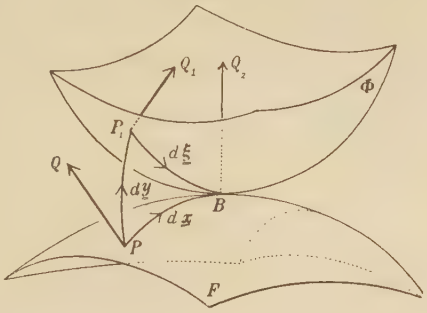
oder noch spezieller, einen Nabelpunkt und den gleichen Krümmungsmittelpunkt haben.

§ 5. Kinematik.

1. Nunmehr sind für die kinematische Betrachtung alle Vorbereitungen getroffen. Zur Zeit t sollen sich beide Flächen im Punkte P berühren (s. Fig. 1); die Normalen $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} = \vec{PQ}$ fallen zusammen.

Nach Ablauf des Zeitelementes Δt ist ein anderer Punkt Berührungspunkt geworden (auf diesen Zeitpunkt bezieht sich die Figur); der jeweilige Berührungspunkt hat auf F die Bahn $\overrightarrow{PB} = d\boldsymbol{x}$, auf Φ die Bahn $\overrightarrow{P_1B} = d\boldsymbol{\xi}$ beschrieben. In B fallen jetzt die Berührungsnormalen zusammen, es ist $\overrightarrow{BQ_2} = \boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, wo die Vektoren $d\boldsymbol{n}$ und $d\boldsymbol{v}$ den Fortschreitungsrichtungen $d\boldsymbol{x}$ bzw. $d\boldsymbol{\xi}$ zugeordnet sind. Die frühere Berührungsnormale PQ ist mit Φ fest verbunden nach $\overrightarrow{P_1Q_1} = \boldsymbol{v}$ gekommen.

Fig 1.



Die Strecke $d\mathfrak{x} = \overrightarrow{PP_1}$ ist die Verschiebung des ehemaligen Berührungspunktes, also wenn $\dot{\mathfrak{x}}$ seine Geschwindigkeit bedeutet, $d\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{x}}\,dt$; aus der Figur entnimmt man die Beziehung $d\mathfrak{x} + d\boldsymbol{\xi} = d\boldsymbol{x}$, oder also:

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathfrak{x}}. \tag{1}$$

Ferner folgt sofort:

$$\overrightarrow{QQ_1} - \overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{P_1Q_1} - \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n},$$

oder wegen $\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$:

$$\overrightarrow{QQ_1} - \overrightarrow{PP_1} = d\boldsymbol{n} - d\boldsymbol{v};$$

die Differenz links ist dadurch entstanden, daß sich die Punkte P und Q mit verschiedenen Geschwindigkeiten nach P_1 bzw. Q_1 bewegt haben. Nach § 3 (1) sind die Geschwindigkeiten von zwei verschiedenen Punkten des starren Körpers mit den Ortsvektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben durch:

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}^* + \boldsymbol{\omega}\wedge(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*), \quad \dot{\mathfrak{y}} = \dot{\mathfrak{x}}^* + \boldsymbol{\omega}\wedge(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}^*), \qquad \text{also}$$
$$\dot{\mathfrak{y}} - \dot{\mathfrak{x}} = \boldsymbol{\omega}\wedge(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}).$$

Nimmt man $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \boldsymbol{n}$, so ist $\overrightarrow{PP_1} = \dot{\mathfrak{x}}\,dt$, $\overrightarrow{Q\,Q_1} = \dot{\mathfrak{y}}\,dt$, somit

$$d\boldsymbol{n} - d\boldsymbol{v} = \overrightarrow{QQ_1} - \overrightarrow{PP_1} = (\dot{\mathfrak{y}} - \dot{\mathfrak{x}})\,dt = \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{n}\,dt. \tag{2}$$

In dem bezeichneten Zeitpunkte $(t + \Delta t)$ habe P_1 die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{x}}'$; dann hat nach dem eben angewandten Satze der Punkt B, der ja ebenfalls dem Körper $\mathfrak{K}$ angehört, die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathfrak{z}} = \dot{\mathfrak{x}}' + \boldsymbol{\omega}\wedge d\boldsymbol{\xi} = \dot{\mathfrak{x}}' + \boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\boldsymbol{\xi}}\,dt. \tag{3}$$

Bedeutet $\ddot{\mathfrak{x}}$ die Beschleunigung von P zur Zeit t, so ist ferner:

$$\dot{\mathfrak{x}}' = \dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}\,dt, \text{ also}$$
$$\dot{\mathfrak{z}} = \dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}\,dt + \boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\boldsymbol{\xi}}\,dt. \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit des jeweiligen Berührungspunktes liegt in der zugehörigen Tangentialebene, für den Punkt P z. B. folgt dies aus (1), wo die Vektoren $\dot{\boldsymbol{x}}$ und $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ in dieser Ebene liegen. Daher steht auch $\dot{\mathfrak{z}}$ auf $\overrightarrow{BQ_2} = \boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}$ senkrecht; es ist also:

$$0 = (\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}) | \dot{\mathfrak{z}} = (\boldsymbol{n} + d\boldsymbol{n}) | (\dot{\mathfrak{x}} + \ddot{\mathfrak{x}}\, dt + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{\xi}}\, dt);$$

da $\boldsymbol{n} | \dot{\mathfrak{x}} = 0$ ist, so ergeben die Differentiale von der ersten Größenordnung:

$$\boldsymbol{n} | (\ddot{\mathfrak{x}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{\xi}}) dt + d\boldsymbol{n} | \dot{\mathfrak{x}} = 0, \text{ oder}$$

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = \dot{\boldsymbol{\xi}} | \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{n} - \dot{\mathfrak{x}} | \frac{d\boldsymbol{n}}{dt}. \tag{5}$$

Zerlegt man $\boldsymbol{\omega}$ nach den drei zu einander senkrechten Richtungen $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega' \cdot \boldsymbol{n} + \omega_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \cdot \boldsymbol{e}_2, \text{ so kommt:}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{n} = \omega_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \omega_1 \cdot \boldsymbol{e}_2. \tag{6}$$

Daher lautet (5), in Komponenten nach $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ geschrieben, wegen § 4 (5):

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = \dot{\xi}^{(1)} \omega_2 - \dot{\xi}^{(2)} \omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(1)} \dot{x}^{(1)}}{r_1} + \frac{\dot{\xi}^{(2)} \dot{x}^{(2)}}{r_2}. \tag{5a}$$

2. Zur Bestimmung der unbekannten Vektoren $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ und $\dot{\boldsymbol{x}}$ dienen nach (1) und (2), sowie § 4 (11) die Gleichungen:

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathfrak{x}}$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{n}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\nu}}{dt}, \text{ oder in Komponenten:} \tag{6a}$$

$$-\frac{\dot{x}^{(1)}}{r_1} + \varkappa_{11} \dot{\xi}^{(1)} + \varkappa_{12} \dot{\xi}^{(2)} = \omega_2$$

$$-\frac{\dot{x}^{(2)}}{r_2} + \varkappa_{21} \dot{\xi}^{(1)} + \varkappa_{22} \dot{\xi}^{(2)} = -\omega_1. \tag{6b}$$

Hieraus folgt durch Elimination mittels der Abkürzungen § 4 (13):

$$k_{11} \dot{x}^{(1)} + k_{12} \dot{x}^{(2)} = \omega_2 + \varkappa_{11} \dot{\mathfrak{x}}^{(1)} + \varkappa_{12} \dot{\mathfrak{x}}^{(2)}$$

$$k_{21} \dot{x}^{(1)} + k_{22} \dot{x}^{(2)} = -\omega_1 + \varkappa_{21} \dot{\mathfrak{x}}^{(1)} + \varkappa_{22} \dot{\mathfrak{x}}^{(2)}. \tag{7a}$$

$$k_{11} \dot{\xi}^{(1)} + k_{12} \dot{\xi}^{(2)} = \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1}$$

$$k_{21} \dot{\xi}^{(1)} + k_{22} \dot{\xi}^{(2)} = -\omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{r_2}. \tag{7b}$$

Setzt man in (5a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\mathfrak{x}} + \dot{\boldsymbol{\xi}}$ ein, so folgt nach (7b):

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = \frac{1}{r_1} \cdot \dot{\mathfrak{x}}^{(1)^2} + \frac{1}{r_2} \cdot \dot{\mathfrak{x}}^{(2)^2} + k_{11} \dot{\xi}^{(1)^2} + 2 k_{12} \dot{\xi}^{(1)} \dot{\xi}^{(2)} + k_{22} \dot{\xi}^{(2)^2}. \tag{5b}$$

Führt man noch $\dot{\mathfrak{x}}^2 = \dot{\mathfrak{x}}^{(1)^2} + \dot{\mathfrak{x}}^{(2)^2}$ ein und bezeichnet den Krümmungsradius des Normalschnittes von F in Richtung von $\dot{\mathfrak{x}}$ mit r, so ist nach dem Eulerschen Satze

$$\frac{\dot{\mathfrak{x}}^{(1)^2}}{r_1} + \frac{\dot{\mathfrak{x}}^{(2)^2}}{r_2} = \frac{\dot{\mathfrak{x}}^2}{r}, \text{ und daher}$$

$$\ddot{\mathfrak{x}}_n = \frac{\dot{\mathfrak{x}}^2}{r} + k_{11} \dot{\xi}^{(1)^2} + 2 k_{12} \dot{\xi}^{(1)} \dot{\xi}^{(2)} + k_{22} \dot{\xi}^{(2)^2}. \tag{8}$$

3. Im Falle $k = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 + 0$ kann man (7b) nach den $\dot{\xi}$ auflösen (vgl. § 4 (14′)), und erhält durch Einsetzen in (8) die endgültige Formel:

$$\ddot{\xi}_n = \frac{\dot{\xi}^2}{r} + \left\{\omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1}\right\}^2 \frac{k_{22}}{k} - 2\left\{\omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1}\right\}\left\{-\omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{r_2}\right\}\frac{k_{12}}{k} + \left\{-\omega_1 + \frac{\dot{\xi}^{(2)}}{r_2}\right\}^2 \frac{k_{11}}{k}. \tag{9}$$

Die Normalbeschleunigung des Berührungspunktes ist, wie in § 3 *vorweggenommen, eine quadratische Funktion* $Q^{(2)}(\dot{\xi}, \omega)$ *der Geschwindigkeitsgrößen* $\dot{\xi}$ *und* ω*; die Koeffizienten sind durch Krümmung und Lage der berührenden Flächen bestimmt.*

Falls alle $k_{\mu\nu}$ verschwinden (§ 4, 4.), folgt aus (8):

$$\ddot{\xi}_n = \frac{\dot{\xi}^2}{r} \tag{9′}$$

als *die gesuchte Formel.*

Sollte schließlich die Matrix der $k_{\mu\nu}$ den Rang 1 haben, so müssen die rechten Seiten der Gleichungen (7) gewisse Bedingungen erfüllen, die sich aber nicht gut explizit wiedergeben lassen; alsdann läßt sich ein $\dot{\xi}$ berechnen, und man hat diesen Wert in (5b) einzusetzen. U. a. führen die Probleme der ebenen Bewegung auf diesen Fall, wir werden später darauf zurückkommen.

§ 6. Diskussion der linearen Gleichung.

1. Wir sind nunmehr am Ziele. Der in § 3, Ende, noch fehlende Nachweis ist erbracht; *es ist in der Tat:*

$$N \cdot B - R \cdot C = Q^{(2)} - \ddot{\xi}_n^0 \equiv A \tag{1}$$

die gesuchte lineare Gleichung zwischen N und R.

Der Koeffizient A hängt noch von $\ddot{\xi}_n^0$ ab, d. h. von der Beschleunigung, die die eingeprägten Kräfte allein dem berührenden Punkte von $\mathfrak{K}$ erteilen. Ist $A = 0$, also $\ddot{\xi}_n^0 = Q^{(2)}$, so genügt die Wirkung der eingeprägten Kräfte allein, damit sich der Körper auf der Unterlage bewegt, ohne daß sie ihm einen Widerstand zu leisten braucht. Dagegen *würde im Falle* $A > 0$ oder $\ddot{\xi}_n^0 < Q^{(2)}$ *der Körper in die Unterlage eindringen, wenn sie nicht starr wäre;* die eingeprägten Kräfte pressen ihn somit an die feste Unterlage an. *Nur wenn* $A < 0$, also $\ddot{\xi}_n^0 > Q^{(2)}$ *ist, kann der Körper unter dem Einfluß der eingeprägten Kräfte allein sich nicht auf der festen Oberfläche bewegen,* seine Beschleunigung ist zu groß, *er wird sich* (wenigstens für den betrachteten Augenblick), *von der Unterlage abheben.*

2. Es ist nun unsere Aufgabe, zu untersuchen, ob und unter welchen Umständen das Gleichungensystem:

$$N \cdot B - R \cdot C = A,\ R = R(N);\ N \geqq 0,\ R \geqq 0 \tag{2}$$

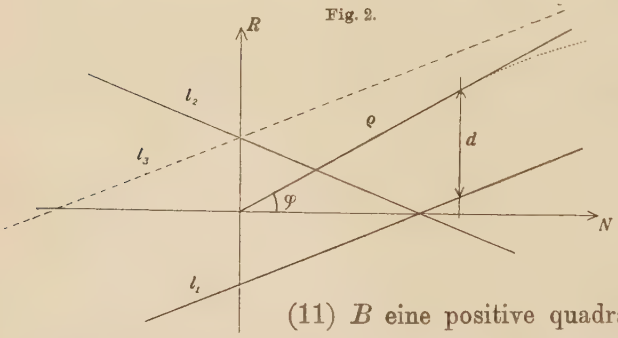
endliche Lösungen N, R hat. Sollten sie nicht existieren, so bleibt immer noch die Möglichkeit, daß der Körper sich frei bewegen und von der Unterlage abheben kann; dann greifen an ihm keine Reaktionen, sondern nur die eingeprägten Kräfte an, und jetzt folgt nach unserer eben angestellten Überlegung: *Der Körper kann sich nur im Falle* $A < 0$ *abheben.* Deshalb können wir unsere Aufgabe schärfer so aussprechen:

Das Reibungsgesetz $R = R(N)$ *ist so aufzustellen, daß für* $A > 0$ *stets eine Lösung des Systems* (2) *vorhanden ist;* für $A < 0$ *braucht* dies *nicht der Fall* zu sein, der Körper hebt sich dann von der Unterlage ab.

Hier stellt sich nunmehr eine *Zweideutigkeit* ein: Wenn nämlich für $A < 0$ die Gleichungen (2) nun doch eine Lösung haben, so sind zwei Bewegungen denkbar: die eine unter *Berührung* der Unterlage ($N > 0$, $R > 0$), die andere unter *Abheben* von der Unterlage (wegen $A < 0$). Will man diese Unbestimmtheit nicht in Kauf nehmen, so muß man durch ein geeignetes Prinzip fordern, daß im Falle $A < 0$ unter allen Umständen ein Abheben des Körpers eintritt; wir wollen uns im folgenden stets auf den Fall $A > 0$ beschränken, der dann noch allein Schwierigkeiten macht. Es sei noch bemerkt, daß natürlich auch das Coulombsche Gesetz zu den erwähnten Schwierigkeiten führt, worauf später nochmals hingewiesen werden soll.

3. Trägt man in der Ebene N und R als rechtwinklige Koordinaten auf (s. Fig. 2), so stellt die lineare Gleichung (2) eine Gerade l dar, das Reibungsgesetz eine Kurve ϱ, die durch den Nullpunkt $R = N = 0$ geht und zu jeder positiven Abszisse eine positive Ordinate hat; gesucht sind solche Schnittpunkte von ϱ und l, die im ersten Quadranten liegen. Die Lagen der Geraden l hängen von den Vorzeichen der Koeffizienten ab. Nun ist nach § 3 (11) B eine positive quadratische Funktion der $\mathfrak{a}$ mit dem Minimumwert $\frac{1}{M}$, der also stets von Null verschieden ist. C verschwindet mit den $\mathfrak{a}$, und dies tritt ein (§ 3 (4)), wenn die Vektoren $\boldsymbol{n}$ und $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*$ parallel sind, wenn also die Normale $\boldsymbol{n}$ durch den Schwerpunkt G geht; das ist z. B. der Fall, wenn der bewegte Körper eine homogene Kugel ist. Man hat dann $N = M \cdot A$, der Normaldruck wird unabhängig von der Reibung. Schließen wir noch den Fall $A = 0$ aus,

Fig. 2.



in dem sich der Körper ohnehin auf der Unterlage bewegt, so hat die Gerade l die Lagen:

$$l_1 \text{ für } C > 0; \quad l_2 \text{ für } C < 0 \quad [l_3 \text{ im Falle } A < 0,\ C > 0],$$

und alle diese Fälle lassen sich verwirklichen (vgl. § 8).

Die Gerade l_2 hat mit jeder Kurve ϱ eines Reibungsgesetzes einen Schnittpunkt, hier liegen keinerlei Schwierigkeiten vor.

Es bleibt nur noch die Gerade l_1. In diesem Falle *versagt das Coulombsche Gesetz* $R = \text{const.}\, N = \mu' \cdot N$; die zugehörige Kurve ϱ ist eine Gerade durch den Nullpunkt, die mit der Achse der N den „Reibungswinkel" $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \mu'$ einschließt. *Sobald* $\mu' \geqq \frac{B}{C}$ ist, *haben beide Graden keinen Schnittpunkt im ersten Quadranten;* dieser kritische Wert von μ' kann aber, wie später an einem Beispiel gezeigt werden wird, beliebig klein sein, sodaß die *gewöhnlichen Werte des Coulombschen Koeffizienten jene Ungleichung erfüllen.* (Hier werde die Bemerkung am Ende von 2. bestätigt: Bei der Geraden l_3 liefert das Coulombsche Gesetz einen Schnittpunkt für $\mu' > \frac{B}{C}$, es ist eine Bewegung unter positivem Drucke N möglich, und die besprochene Zweideutigkeit tritt wirklich ein). Das sind die *Widersprüche,* auf die Painlevé in der eingangs zitierten Arbeit hingewiesen hat.

Das Coulombsche Gesetz entspricht somit nicht den Forderungen, die wir an ein Reibungsgesetz gestellt haben; wir müssen vielmehr *verlangen, daß die Kurve ϱ stets mit der Geraden l_1 einen Schnittpunkt liefert.* Hierzu reicht die durch v. Mises vorgeschlagene Annahme

$$\lim_{N=\infty} \mu(N) = 0$$

aus. Der Nachweis ist ganz einfach:

Zu der Abszisse N gehört die Differenz d der Ordinaten von ϱ und l_1:

$$d = N\left\{\mu - \frac{B - \frac{A}{N}}{C}\right\};$$

Die Klammer ist für $N = \frac{A}{B}$ gleich $\mu\left(\frac{A}{B}\right)$, also positiv, für einen hinreichend großen endlichen Wert N' dagegen wird $\mu + \frac{A}{N'C} < \frac{B}{C}$, die Klammer wird negativ; daher gibt es mindestens einen Wert $\frac{A}{B} < N < N'$, für den d verschwindet, d. h. einen Schnittpunkt von ϱ und l.

Hiermit sind wir am Ziele unserer Untersuchung. Es ist erwiesen:

Jedes der Bedingung

$$\lim_{N=\infty} \mu(N) = 0$$

entsprechende Reibungsgesetz genügt unseren in § 1, 2. *aufgestellten Forderungen; insbesondere zeigt es nicht die Mängel des Coulombschen Gesetzes.*

§ 7. Die lineare Gleichung für die ebene Bewegung.

Wir wollen im zweiten Teile der Arbeit die Reibungstheorie auf ein Beispiel aus der ebenen Bewegung anwenden. Zur Bestimmung der Reaktionen dient auch da eine lineare Gleichung, die man im allgemeinen aus den Differentialgleichungen des Problems bequem wird ableiten können. Es erscheint aber lohnend, auszuführen, wie man sie aus den allgemeinen Überlegungen, die wir in den vorangegangenen Abschnitten angestellt haben, durch Spezialisierung erhalten kann. Die Formeln aus § 3 lassen sich ohne weiteres übertragen, dagegen bedarf die kinematische Ableitung des § 5 einer eingehenden Behandlung; entsprechend den verschiedenen Möglichkeiten des Überganges zu unserem Beispiele sollen hier zwei spezielle Fälle näher besprochen werden.

1. *Körper auf ebener Unterlage.*

Ist die feste Unterlage F eben, so werden ihre Krümmungsradien unendlich, die Krümmungslinien sind beliebig; wir denken uns in der Ebene zwei orthogonale Kurvenscharen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ so bestimmt, daß an der Berührungsstelle ihre Tangentenrichtungen mit den Richtungen ε_{I} bzw. $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ zusammenfallen. Dann ist der in § 4, 2. eingeführte Winkel $\varphi = 0$, und nach § 4 (10) und (13) wird:

$$k_{11} = \varkappa_{11} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}};\quad k_{12} = \varkappa_{12} = 0;\quad k_{22} = \varkappa_{22} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{II}}};\quad k = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}\varrho_{\mathrm{II}}},$$

und hiermit folgt aus § 5 (9):

$$\ddot{\xi}_n = \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2^2 + \varrho_{\mathrm{II}}\omega_1^2. \tag{1}$$

Aus § 5 (7) folgt nebenbei bemerkt:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2 + \dot{\xi}^{(1)};\quad & \dot{x}^{(2)} &= -\varrho_{\mathrm{II}}\omega_1 + \dot{\xi}^{(2)};\\ \dot{\xi}^{(1)} &= \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2; & \dot{\xi}^{(2)} &= -\varrho_{\mathrm{II}}\omega_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Vorausgesetzt ist bei dieser Ableitung, daß keiner der Krümmungsradien ϱ_{I} und ϱ_{II} unendlich ist; ist dies aber doch der Fall, etwa $\frac{1}{\varrho_{\mathrm{II}}} = 0$, so schließen wir aus § 5 (7b):

$$\dot{\xi}^{(1)} = \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2;\quad 0 = -\omega_1. \tag{2'}$$

Es muß also $\boldsymbol{\omega}$ auf $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{I}}$ senkrecht stehen, und diese Forderung ist plausibel, wenn man sich den Körper als Zylinder vorstellt, dessen Erzeugenden zur Richtung $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{II}}$ parallel sind; hätte die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in der Ebene eine Komponente senkrecht zur Zylinderachse, so würde der Zylinder in der Ebene aufkippen, also die Berührungsbedingung verletzt sein. Aus § 5 (8) folgt nunmehr:

$$\ddot{\xi}_n = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} \cdot \dot{\xi}^{(1)^2} = \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2^2, \tag{1'}$$

und aus (7a):

$$\dot{x}^{(1)} = \varrho_{\mathrm{I}}\omega_2 + \dot{\xi}^{(1)}. \tag{2'}$$

Die Formeln (1′) und (2′) gelten ersichtlich für die Bewegung einer ebenen Kurve auf einer Geraden.

2. *Die ebene Bewegung.*

Wir denken uns nunmehr beide Körper als Zylinder, deren Geraden auf einer Ebene η senkrecht stehen. Die zu diesen gehörigen Krümmungsradien r_2 und ϱ_{II} sind unendlich groß; die Schnittkurven der Zylinder mit η sind die anderen Krümmungskurven. Wieder ist $\varphi = 0$, daher:

$$\varkappa_{11} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}},\ k_{11} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{r_1};\quad \varkappa_{12} = k_{12} = 0;\quad \varkappa_{22} = k_{22} = 0.$$

Aus § 5 (7) folgt deshalb:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{r_1}\right)\dot{x}^{(1)} &= \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{\varrho_{\mathrm{I}}},\ 0 = -\omega_1, \\ \left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{r_1}\right)\dot{\xi}^{(1)} &= \omega_2 + \frac{\dot{\xi}^{(1)}}{r_1},\ 0 = -\omega_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Bedingung $\omega_1 = 0$ ist wiederum einleuchtend, um aber wirklich den Fall ebener Bewegung zu haben, müssen wir noch verlangen $\dot{\xi}^{(2)} = 0$, sowie $\boldsymbol{\omega} \mid \boldsymbol{n} = 0$, Einschränkungen, die sich aus unserer Formel natürlich nicht ergeben können; ferner folgt aus § 5 (5b):

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_n = \frac{\dot{\xi}^{(1)^2}}{r_1} + \left(\frac{1}{\varrho_{\mathrm{I}}} - \frac{1}{r_1}\right)\dot{\xi}^{(1)^2}, \text{ und nach kurzer Reduktion:} \\ &\ddot{\xi}_n = \frac{1}{r_1 - \varrho_{\mathrm{I}}}\{\dot{\xi}^{(1)^2} + r_1\varrho_{\mathrm{I}}\omega_2^2 + 2\omega_2\varrho_{\mathrm{I}}\dot{\xi}^{(1)}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Bezüglich der Wahl der Vorzeichen usw. gilt nach unseren Überlegungen folgende Regel: Die gemeinsame Normale $\boldsymbol{n}$ sei auf die bewegte Kurve zu gerichtet; der Tangente werde eine positive Richtung $\boldsymbol{e}$ so beigelegt, daß die Normale $\boldsymbol{n}$ durch positive Drehung (gegen den Uhrzeigersinn) in sie übergeht; die Geschwindigkeit $\dot{\xi}$ des Berührungspunktes liegt in der Tangentenrichtung und soll nach $\boldsymbol{e}$ hin positiv genommen werden; entsprechend sei die Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn positiv gemessen. Die Krümmungsradien r und ϱ der festen bzw. bewegten Kurve sollen mit positivem Zeichen genommen werden, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der $+\boldsymbol{n}$ Richtung liegt. Dann gilt die gesuchte Beziehung:

$$\ddot{\xi}_n = \frac{1}{r - \varrho}\{\dot{\xi}^2 + r\varrho\omega^2 + 2\varrho\omega\dot{\xi}\}. \tag{4'}$$

Ist die feste Kurve eine Gerade, so ist r unendlich groß und es kommt:

$$\ddot{\xi}_n = \varrho\omega^2, \tag{4a}$$

genau wie in (1′).

3. Nun sollen noch für die Koeffizienten A, B, C der linearen Gleichung ihre Ausdrücke bei der ebenen Bewegung abgeleitet werden (vgl. § 3). Es ist nicht nötig, über die Lagen der Koordinatenachsen in der Ebene η Annahmen zu machen; die dritten Achsen $O(3)$ und $G(\mathrm{III})$ stehen auf η senkrecht, wir wollen sie so orientieren, daß sie mit den oben festgelegten Richtungen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{e}$ ein rechtsläufiges Koordinatensystem bilden. Seien p und q die Koordinaten des Schwerpunktes G bezüglich der Achsen $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{n}$. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (s. § 3, (4)) stehen auf η senkrecht, es ist $\mathfrak{a}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{a}_{\mathrm{II}} = 0$, $\mathfrak{b}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{b}_{\mathrm{II}} = 0$, dagegen:

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{III}} = p, \quad \mathfrak{b}_{\mathrm{III}} = q. \tag{5}$$

Nach einer bekannten Formel der Vektoranalysis ist:

$$\boldsymbol{n}|\boldsymbol{\omega}\wedge[\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)] = [\boldsymbol{n}|\boldsymbol{\omega}][\boldsymbol{\omega}|(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)] - [\boldsymbol{n}|(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*)]\omega^2,$$

oder da $\boldsymbol{n}$ auf $\boldsymbol{\omega}$ senkrecht steht, gleich:

$$+ q\omega^2.$$

Nunmehr wird (§ 3 (11) und (12)):

$$B = \frac{1}{M} + \frac{p^2}{T_{\mathrm{III}}}, \quad C = \frac{pq}{T_{\mathrm{III}}}, \tag{6}$$
$$\ddot{\mathfrak{x}}_n^0 = \frac{\mathfrak{F}_n^0}{M} + q\omega^2 + \frac{p}{T_{\mathrm{III}}}\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}^0.$$

Weiterhin haben wir.

$$A = \ddot{\mathfrak{x}}_n - \ddot{\mathfrak{x}}_n^0 = \frac{1}{r-\varrho}\{\dot{\mathfrak{x}}^2 + r\varrho\omega^2 + 2\varrho\omega\dot{\mathfrak{x}}\} - q\omega^2 - \frac{\mathfrak{F}_n^0}{M} - \frac{p}{T_{\mathrm{III}}}\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}^0. \tag{6'}$$

Bezeichnet s den Schwerpunktsträgheitsradius, so ist $T_{\mathrm{III}} = Ms^2$; statt $\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}^0$, des Momentes der eingeprägten Kräfte in G, sei künftig $\mathfrak{M}^0$ geschrieben. Dann lautet die *gesuchte lineare Gleichung für zwei Kurven:*

$$N(p^2+s^2) - Rpq = Ms^2\frac{\dot{\mathfrak{x}}}{r-\varrho}(\dot{\mathfrak{x}} + 2\varrho\omega) - Ms^2\omega^2\left(q - \frac{r\varrho}{r-\varrho}\right) - s^2\mathfrak{F}_n^0 - p\mathfrak{M}^0. \tag{7}$$

Ist die Unterlage eine starre Gerade ($r = \infty$), so geht die Gleichung über in:

$$N(p^2 + s^2) - Rpq = -Ms^2\omega^2(q - \varrho) - s^2\mathfrak{F}_n^0 - p\mathfrak{M}^0. \tag{8}$$

Die Formel (7) ist übrigens schon von Chaumat für aufeinander rollende Kreise mitgeteilt worden (a. a. O. s. § 2).

II. Durchführung eines Beispiels.

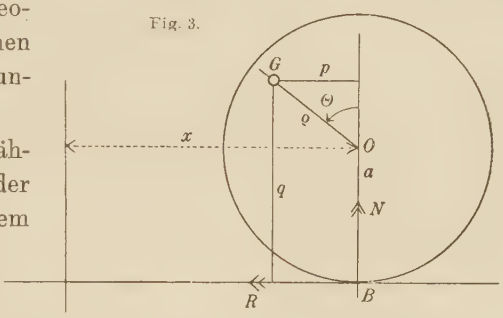
§ 8. Die Differentialgleichungen des Problems.

1. Mit der im vorangehenden aufgestellten Theorie wollen wir die von Chaumat experimentell untersuchte Aufgabe behandeln, und wir wählen solche Anfangsbedingungen, bei denen das Coulombsche Gesetz versagt:

Eine vertikal gestellte schwere Kreisscheibe mit exzentrisch gelegenem Schwerpunkte G bewege sich in ihrer Ebene auf einer horizontalen, ebenen, rauhen Unterlage; welche Bewegung tritt unter den kritischen Anfangsbedingungen ein?

Die exzentrische Lage des Schwerpunktes stellt man etwa folgendermaßen her: die Kreisscheibe vom Radius a (Mittelpunkt O) sei massiv oder auch nach Art eines Reifes gefertigt, ihre Masse sei m_1; in der Nähe der Peripherie werde eine schwere Masse m_2 angebracht, in Gestalt eines Kreiszylinders vom Radius r, dessen Achse senkrecht zur Scheibenebene steht und von ihr halbiert wird; der Schwerpunkt des ganzen Systems habe von O den Abstand ϱ. Bei dieser Anordnung kann sich die Scheibe ungehindert auf der Unterlage bewegen; macht man m_2 gegen m_1 sehr groß, so wird der Schwerpunktsträgheitsradius s der ganzen Scheibe angenähert dem der Masse m_2 allein gleich, also $s = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, und läßt sich mit r beliebig verkleinern. Der Schwerpunkt G liegt dann annähernd im Mittelpunkt des schweren Zylinders, also nahe der Peripherie der Scheibe. Für die theoretischen Überlegungen machen wir natürlich keine Voraussetzungen über die Größen ϱ und s.

Fig. 3.



2. Die Bewegungsebene wählen wir zur (x, y)-Ebene, auf der Unterlage zählen wir von einem beliebigen Punkte aus (Fig. 3) Koordinaten x nach dem jeweiligen Berührungspunkte B, der Schwerpunkt habe von ihr eben den Abstand q, von der Berührungsnormalen den Abstand p. Der Strahl $OG = \varrho$ bilde mit der Normalen augenblicklich den Winkel θ, dessen positiver Sinn dem des Uhrzeigers entgegenlaufe. Der Berührungspunkt B gleite zu Beginn auf der Unterlage nach wachsendem x, die Reibungskraft R hat dann die entgegengesetzte Richtung.

Mit Hilfe des Schwerpunkts- und Flächensatzes erhält man die *Bewegungsgleichungen:*

$$\text{I} \qquad M\frac{d^2}{dt^2}(x-p) = -R,$$

$$\text{II}' \qquad M\frac{d^2q}{dt^2} = N - Mg,$$

$$\text{III} \qquad Ms^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = pN - qR;$$

dazu kommen die *geometrischen* Beziehungen:

$$p = \varrho \sin\theta$$
$$q = a + \varrho\cos\theta$$

und das *Reibungsgesetz*

$$\mu \equiv \frac{R}{N} = \mu(N),\ \lim_{N=\infty}\mu = 0,$$

im ganzen 6 Gleichungen für x, p, q, θ, R, N. Führt man in II′ θ mittels

$$(1)\qquad \frac{dp}{dt} = (q-a)\dot\theta; \qquad \frac{d^2p}{dt^2} = -p\dot\theta^2 + (q-a)\ddot\theta;$$

$$(2)\qquad \frac{d(q-a)}{dt} = -p\dot\theta; \qquad \frac{d^2(q-a)}{dt^2} = -(q-a)\dot\theta^2 - p\ddot\theta$$

ein, so erhält man:

$$(II)\qquad -M((q-a)\dot\theta^2 + p\ddot\theta) = N - Mg.$$

Hierzu kommen noch die *Anfangsbedingungen:*

(A) Für $t=0$: $\quad \theta = \theta_0 + 0,\ \dot\theta = \dot\theta_0,\ v = v_0 > 0,$

wenn $v = \dot x + a\dot\theta$ die Geschwindigkeit des Punktes der Scheibe ist, der eben in B berührt. Wir haben für die Unbekannten x und θ, N und R mit dem Reibungsgesetz vier simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung; für unsere Zwecke kommt die Lösung an der Stelle $t=0$ in Betracht.

3. Aus II und III folgt durch Elimination von $\ddot\theta$ die Gleichung:

$$(3)\qquad N(s^2+p^2) - Rpq = Ms^2(g - (q-a)\dot\theta^2).$$

Das ist aber nichts anderes als die in § 7 (8) mitgeteilte *lineare Relation zwischen N und R*, falls eine Kurve auf einer festen Geraden rollt und gleitet. Für die Kreisscheibe ist nur $\varrho = a = \text{const.}$ zu setzen, das Moment $\mathfrak{M}^0$ der Schwerkraft in G ist Null, ihre Komponente nach n dagegen $\mathfrak{F}_n^0 = -Mg$, daher gehen beide Gleichungen ineinander über. Gibt man die Anfangslage θ_0 und Anfangsgeschwindigkeit $\dot\theta_0$ so, daß $g - (q_0 - a)\dot\theta_0^2 > 0$ wird, so liegt (vgl. § 6, 3.) der Fall der Geraden l_1 oder l_2 vor, je nachdem der Berührungspunkt B nach positivem oder negativem x hin gleitet; ist aber $g - (q_0 - a)\dot\theta_0^2 < 0$, so kommt man auf den Fall der Geraden l_3; damit sind die dort aufgezählten drei Fälle als ausführbar erwiesen.

Wir wollen jedoch jetzt $\dot\theta_0 = 0$, $R > 0$ annehmen, haben es also mit der Geraden l_1 zu tun; da liefert unser Reibungsgesetz aus (3) stets positive endliche Werte N und R, während das Coulombsche Gesetz $\mu = \text{const.} = \mu'$ auf einen Widerspruch führt, sobald:

$$(4)\qquad \mu' \geqq \frac{s^2+p_0^2}{p_0 q_0} = \frac{s^2}{p_0 q_0} + \frac{p_0}{q_0}$$

angenommen wird. Gibt man sich zuerst θ_0, so kann man, um diesen

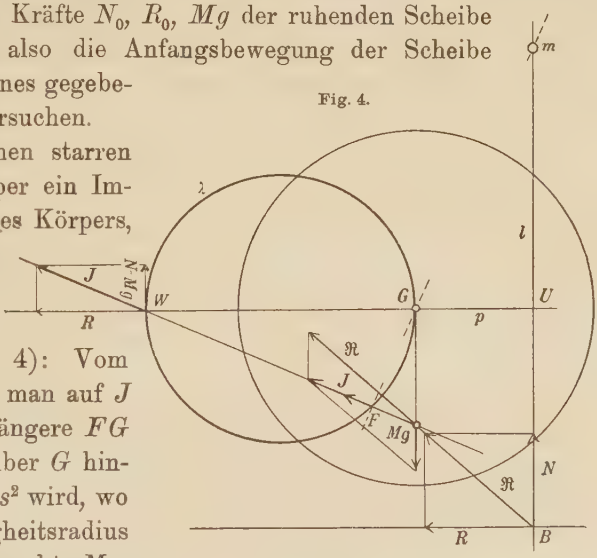
Fall sicher herbeizuführen, durch geeignete Massenverteilung (vgl. § 8, 1) $s = p_0$ machen, und hat dann wegen

$$\mu' \geqq \frac{2p_0}{q_0} \quad \text{oder} \quad p_0 \leqq \tfrac{1}{2} q_0 \mu' = \tfrac{1}{2} \mu'(a + \varrho \cos\theta_0)$$

nur a hinreichend groß zu nehmen, damit die Ungleichung (4) erfüllt ist. Wir wollen jedoch zunächst nur voraussetzen, daß die Gl. (4) für irgend welche Werte s und θ_0 bestehe, und erst später zur Vereinfachung $s = p_0$ annehmen.

§ 9. Die Anfangsbewegung im Intervalle τ.

1. In bekannter Weise kann man die Gleichungen I—III mit (A) nach dem sog. Cauchy-Lipschitzschen Verfahren integrieren. Für den Moment $t = 0$ sind nach Berechnung von N und R alle äußeren Kräfte, also die zweiten Differentialquotienten von x und θ bekannt, man ermittelt aus ihnen die Werte x und θ zur Zeit $t_0 + \Delta t$, hieraus wieder die rechte Seite der Differentialgleichungen usf. Es wird sich später zeigen, daß uns die Kenntnis der Bewegung im ersten Intervalle Δt genügt; es kommt darauf an, ein Intervall τ so abzuschätzen, daß in ihm die zweiten Differentialquotienten noch wesentlich konstant bleiben, und in ihm die Anfangsbewegung festzustellen. Ist τ hinreichend klein, so darf man die entstehende Bewegung zerlegen in die anfänglich bestehende Translationsbewegung $\dot{x}_0$ oder v_0 (wegen $\dot{\theta}_0 = 0$) und die Bewegung, die durch die Kräfte N_0, R_0, Mg der ruhenden Scheibe erteilt wird. Es ist also die Anfangsbewegung der Scheibe unter dem Einflusse eines gegebenen Impulses zu untersuchen.



2. Wirkt auf einen starren ruhenden ebenen Körper ein Impuls J in der Ebene des Körpers, so findet man das Momentanzentrum m der Anfangsbewegung bekanntlich so (Fig. 4): Vom Schwerpunkte G fälle man auf J das Lot GF und verlängere FG um eine Strecke Gm über G hinaus, sodaß $Gm \cdot GF = s^2$ wird, wo s den Schwerpunktsträgheitsradius bedeutet; m ist das gesuchte Momentanzentrum. Schlägt man um G den Kreis mit dem Radius s, so liegt m zu F negativ invers; ist umgekehrt bekannt, daß das Momentan-

zentrum auf einer Geraden l liegt, so folgt sofort, daß F auf dem negativ inversen Bild der Geraden l am Kreise s liegt, also auf einem Kreise λ, der durch G geht. Die Richtung des Impulses steht auf GF in F senkrecht, geht infolgedessen durch den Punkt W von λ, der zu G diametral liegt; ist GU das Lot von G auf l, so sind U und W bezüglich λ negativ invers.

3. In unserem Falle nun bewegt sich B auf der horizontalen Unterlage, das Momentanzentrum liegt somit auf der Berührungsnormalen, der Geraden l des allgemeinen Satzes. Die Punkte U und W sind leicht zu konstruieren. Der Impuls J ist die Resultierende des Normaldruckes N_0 und der Reibung R_0, die im Punkte B angreifen und sich zur Reaktion $\mathfrak{R}$ zusammensetzen, sowie des Gewichtes Mg mit dem Angriffspunkt G; außerdem geht J durch den Punkt W, das Moment der drei Kräfte in W muß demnach verschwinden. Sind p_0 und q_0 die Koordinaten des Punktes G (§ 8, 2.), so ist $GW = \frac{s^2}{p_0}$, und das verschwindende Moment in W:

$$\left(p_0 + \frac{s^2}{p_0}\right) N_0 - q_0 R_0 - \frac{s^2}{p_0} Mg = 0, \quad \text{oder:}$$

$$(1) \qquad (p_0^2 + s^2) N_0 - p_0 q_0 R_0 = Mgs^2.$$

Diese schon früher gefundene Gleichung bedeutet also geometrisch, daß der Impuls J der Kräfte N_0, R_0, Mg durch einen bestimmten Punkt geht.[1]) Zerlegt man den Impuls am Punkte W in seine horizontale und vertikale Komponente (R_0 bzw. $N_0 - Mg$), so ist sein Moment in G gleich $-\frac{s^2}{p_0}(N_0 - Mg)$, und man hat die Bewegungsgleichung:

$$(2) \qquad Ms^2\ddot{\theta} = -\frac{s^2}{p_0}(N_0 - Mg) \quad \text{oder} \quad \ddot{\theta} = -\frac{N_0 - Mg}{Mp_0},$$

und durch Integration:

$$(3) \qquad \dot{\theta} = -\frac{N_0 - Mg}{Mp_0} t; \quad \theta - \theta_0 = -\frac{N_0 - Mg}{2Mp_0} t^2.$$

Um das Momentanzentrum m zu finden, entnehme man aus der Figur die Beziehung:

$$\frac{mU}{p_0} = \frac{R_0}{N_0 - Mg}, \quad \text{oder} \quad mU = \frac{p_0 R_0}{N_0 - Mg}.$$

Alsdann ist

$$mB = mU + q_0 = \frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{N_0 - Mg},$$

1) Das gilt auch noch, wenn beliebige eingeprägte Kräfte gegeben sind; bildet man das Moment des Impulses in W, das ja verschwinden soll, so erhält man die Gl. § 7 (8), wenn man dort noch alle Geschwindigkeitsgrößen gleich Null setzt.

und man hat schließlich als Geschwindigkeit des Berührungspunktes unter dem Einflusse des Impulses J den Ausdruck:

$$(4) \qquad m B \cdot \dot{\theta} = -\frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{M p_0} t,$$

sie ist also nach abnehmendem x gerichtet.

4. Nunmehr ist die uns interessierende Anfangsbewegung gefunden, sie findet statt in dem noch abzuschätzenden Intervalle τ; superponieren wir jetzt wieder die anfängliche Translationsgeschwindigkeit v_0 der ganzen Scheibe, so ergibt sich die Gleitgeschwindigkeit von B:

$$(5) \qquad v = v_0 - \frac{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)}{M p_0} t, \quad \text{gültig für } 0 < t < \tau.$$

Der Punkt B kommt somit zur Ruhe in dem Zeitpunkte:

$$(6) \qquad T = \frac{M p_0 v_0}{p_0 R_0 + q_0 (N_0 - Mg)},$$

aber dieses Resultat ist nur dann richtig, wenn $T < \tau$ bleibt; wir wollen daher im nächsten Paragraphen die Bedingungen für $\mu(N)$ feststellen, unter denen diese Forderung erfüllt ist. Wird dann τ selbst eine kleine Zahl, so gilt dies auch von T, der Körper kommt in kurzer Zeit zur Ruhe, und das versteht man gerade unter „Selbstsperrung". — Es sei noch festgestellt, daß diese geometrische Ableitung von der Kreisgestalt der Scheibe keinen Gebrauch macht, da nur der Krümmungsradius an der Berührungsstelle in Betracht kommt.

§ 10. Abschätzung des Intervalles τ.

1. Zur genauen Eingrenzung des gesuchten Intervalles τ wäre die Kenntnis des ganzen Bewegungsverlaufes erforderlich, die wir uns aber nicht so leicht verschaffen können; wir wollen die Rechnung daher nur näherungsweise durchführen und schlagen folgenden Weg ein:

Wir nehmen an, für den Normaldruck N lasse sich aus den Differentialgleichungen eine konvergente Entwicklung

$$(1) \qquad N = N_0 + N_1' t + N_1 t^2 + \cdots$$

aufstellen; für sehr kleine Werte von t dürfen wir uns auf die Anfangsglieder beschränken; nun wird t auf ein Gebiet $0 < t < \tau$ so eingegrenzt, daß das Glied $N_1 t^2$ (N_1' wird sich gleich Null herausstellen) gegen N_0 klein bleibt. Dann darf man angenähert im Intervalle $(0, \tau)$ $N = N_0$ setzen, und, wie alsdann nachgewiesen wird, auch $\theta = \theta_0$ konstant annehmen. Diesen Nachweis noch erbracht, wird alsdann τ das gesuchte Intervall sein (vgl. § 9).

Nach § 8 gilt für jedes t die Gleichung:

$$(2) \qquad (s^2+p^2)N - pqR = Ms^2(g-(q-a)\dot{\theta}^2), \quad \text{und für } t=0$$

$$(3) \qquad (s^2+p_0^2)N_0 - p_0q_0R_0 = Mgs^2.$$

Wären in (2) p, q und θ als Funktionen von t bekannt, so könnten wir hieraus mit Hilfe von

$$(4) \qquad R = \mu \cdot N$$

die gesuchte Reihenentwicklung für N ableiten. Die Anfangsglieder der Reihe kann man jedoch wegen der Annahme $\dot{\theta}_0 = 0$ ohne Kenntnis der genauen Lösung bestimmen. Setzt man die Reihe (1) in (2) und (4) ein, differentiert je einmal nach t und setzt dann $t=0$, so erhält man für die Koeffizienten N_1' und N_1 zwei Gleichungen zu ihrer Berechnung, die nun durchgeführt werden soll.

2. Für $t=0$ hat man:

$$(5) \qquad \dot{\theta}=0; \quad \frac{d(pq)}{dt}=0; \quad \frac{dp^2}{dt}=0; \quad \frac{d(q-a)\dot{\theta}^2}{dt}=0; \quad \frac{dN}{dt}=N_1'.$$

$$(6) \quad \frac{d^2(p^2)}{dt^2}=2p_0\ddot{p}_0; \quad \frac{d^2(pq)}{dt^2}=p_0\ddot{q}_0+q_0\ddot{p}_0; \quad \frac{d^2(q-a)\dot{\theta}^2}{dt^2}=2(q_0-a)\ddot{\theta}_0^2; \quad \frac{d^2N}{dt^2}=2N_1.$$

Ferner ist unter der Annahme, daß die Reibung R während des betrachteten Intervalles außer von N nicht merklich von anderen Funktionen der Zeit (etwa von v) abhänge:

$$(6a) \quad \frac{dR}{dt}=\left(\mu+N\frac{d\mu}{dN}\right)\frac{dN}{dt}; \quad \frac{d^2R}{dt^2}=\left(\mu+N\frac{d\mu}{dN}\right)\frac{d^2N}{dt^2}+\left(2\frac{d\mu}{dN}+N\frac{d^2\mu}{dN^2}\right)\left(\frac{dN}{dt}\right)^2.$$

Wir setzen noch zur Abkürzung für $t=0$, also $N=N_0$:

$$(6b) \qquad -\lambda \equiv \left(\frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dN}\right)_0, \quad \mu_0=\frac{R_0}{N_0}, \quad \left(\mu+N\frac{d\mu}{dN}\right)_0=\mu_0(1-\lambda).$$

Dann erhält man für N_1' in der angegebenen Weise die Gleichung:

$$(7) \qquad \begin{gathered}(s^2+p_0^2)N_1' - p_0q_0\mu_0(1-\lambda)N_1' = 0 \quad \text{oder} \\ N_1'\{s^2+p_0^2-p_0q_0\mu_0(1-\lambda)\}=0.\end{gathered}$$

Die Klammer reduziert sich wegen (3) auf den Ausdruck:

$$(8) \qquad \frac{Mgs^2}{N_0}+\lambda p_0q_0\mu_0.$$

Nimmt man an, daß $\lambda = -\left(N\frac{d\mu}{dN}\right)_0$ positiv sei, so kann die Klammer nicht verschwinden, es muß dann $N_1'=0$ sein. Mit Fortlassung dieses Koeffizienten erhält man für N_1 die Gleichung:

$$(9) \quad 2N_1\{s^2+p_0^2-p_0q_0\mu_0(1-\lambda)\}+N_0\{2p_0\ddot{p}_0-\mu_0(p_0\ddot{q}_0+q_0\ddot{p}_0)\}=-2Ms^2(q_0-a)\ddot{\theta}_0^2,$$

oder mit Benutzung der Gleichungen II und III:

$$2N_1\{s^2+p_0^2-p_0q_0\mu_0(1-\lambda)\} = \frac{N_0(N_0-Mg)}{Mp_0}\{p_0(4(q_0-a)+\mu_0p_0)-3\mu_0q_0(q_0-a)\}. \tag{10}$$

Zur Abkürzung führen wir ein:

$$h \equiv \frac{N_0-Mg}{N_0}, \quad \text{also} \quad N_0(1-h)=Mg \tag{11}$$

und erhalten statt (3):

$$p_0^2 - p_0q_0\mu_0 + hs^2 = 0. \tag{3'}$$

Mit Benutzung dieses Ausdruckes geht (10) über in:

$$N_1 = \frac{N_0gh^2}{2p_0^2(1-h)} \cdot \frac{(q_0-a)\left\{4-3\frac{\mu_0q_0}{p_0}\right\}+\mu_0p_0}{\frac{\mu_0q_0}{p_0}\{1-h(1-\lambda)\}-(1-h)}. \tag{12}$$

3. Um nun N_1 ausschließlich durch die Anfangswerte p_0, q_0 auszudrücken, müßten wir Gl. (3) nach N_0 auflösen. Das ist aber im allgemeinen in geschlossener Form nicht möglich, zumal wir über den Ausdruck der Funktion $R(N)$ noch nichts angenommen haben. Nimmt man jetzt zur Vereinfachung, wie in § 8, 3. erwähnt, $s=p_0$ an, so geht (3') über in:

$$p_0(1+h)=\mu_0q_0, \tag{13}$$

ist aber natürlich zur Auflösung nach N_0 auch nicht geeignet. Führt man diese Gleichung in (12) ein, so kommt nach einigen Reduktionen

$$N_1 = -\frac{N_0gh(q_0-a)k}{p_0^2(1-h)[1-h+\lambda(1+h)]}, \tag{14}$$

wo

$$k = \frac{3h-1}{2} - \frac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0 \tag{15}$$

gesetzt ist.

Die gesuchte Anfangsentwicklung von N lautet somit:

$$N = N_0\left\{1-\frac{gh(q_0-a)k}{p_0^2(1-h)[1-h+\lambda(1+h)]}t^2\right\}. \tag{16}$$

4. Beschränkt man t auf ein Intervall $0<t<\tau$, derart daß

$$\tau^2 \cdot \frac{gh(q_0-a)k}{p_0^2(1-h)\{1-h+\lambda(1+h)\}} \equiv \delta, \tag{17}$$

gleich einer willkürlich anzunehmenden Zahl δ wird, die man gegen 1 vernachlässigen kann, so ist angenähert $N=N_0$ und $R=R_0$. Ferner ist nach § 9 (3):

$$\theta-\theta_0 = -\frac{N_0-Mg}{2Mp_0}t^2 = -\frac{gh}{2p_0(1-h)}t^2, \quad \text{oder:}$$

$$\theta = \theta_0\left\{1-\frac{gh}{2p_0\theta_0(1-h)}t^2\right\}. \tag{18}$$

Das zweite Glied erreicht im Gebiete $(0, \tau)$ seinen Maximalwert

$$\alpha \equiv \frac{gh}{2p_0\theta_0(1-h)}\tau^2 = \delta \cdot \frac{1-h+\lambda(1+h)}{2k} \cdot \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}. \tag{19}$$

Fordert man von λ, daß

$$1-h+\lambda(1+h) \leqq 2k \tag{20}$$

sein soll, oder wegen (15) nach kurzer Rechnung:

$$\lambda \leqq \frac{1}{1+h}(4h-2-\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0), \tag{20a}$$

so folgt aus (19):

$$\alpha \leqq \delta \cdot \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}, \tag{21}$$

und nach (17) wird

$$\tau^2 \leqq \delta \cdot \frac{2p_0^2(1-h)}{gh(q_0-a)}. \tag{22}$$

Für kleine Winkel θ_0 ist $\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}$ um weniges größer als 1, und jedenfalls hat α die Größenordnung von δ, fällt also in (18) gegen 1 weg. Dann ist im Intervalle $(0, \tau)$ angenähert $\theta = \theta_0$, und daher überhaupt die rechte Seite der Differentialgleichungen I—III merklich konstant. Das in (17) eingeführte Intervall τ ist somit das gesuchte, wenn die Zulässigkeit der Voraussetzungen über λ und θ_0 noch nachgewiesen ist.

§ 11. Eintritt der Selbstsperrung.

1. Über die Funktion $\mu(N)$ haben wir bereits einige Annahmen gemacht, die jetzt noch zu vervollständigen sind. Wir dürfen für kleine Drucke R zu N proportional setzen, der Proportionalitätsfaktor sei gerade dem in § 8 (4) eingeführten kritischen Coulombschen Koeffizienten μ' gleich, der nach Beobachtungen stets kleiner als 1 ist; erst für größere Werte von N entspreche μ der Forderung $\lim_{N=\infty} \mu = 0$, sodaß sicher $\mu < \mu'$ ist. Dann liefert die Gleichung § 10 (3), wie man an der Fig. 2 ohne weiteres übersieht, einen beliebig großen Anfangsdruck N_0, dem gegenüber Mg klein ist; es ist nahezu $h = 1$, ferner $1-h = \frac{Mg}{N_0}$ eine sehr kleine Zahl. Weiter war schon verlangt, daß für $N = N_0$

$$\lambda = -\frac{N\frac{d\mu}{dN}}{\mu} \tag{1}$$

positiv sei; für Werte N_0, die über einem gewissen N' liegen, ist dies wegen der Forderung $\lim \mu = 0$ sicher erfüllt. Jetzt fordern wir aber ausdrücklich, daß die Größe λ für sehr große Drucke weder Null noch unendlich werde und die Entwicklung gestatte:

$$\lambda = \sigma\left\{1 + \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \cdots\right\}; \tag{2}$$

durch Integration folgt:

$$(3) \qquad \mu = c \cdot e^{-\sigma \ln N}\left(1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \cdots\right) = \frac{c}{N^\sigma}\left(1 + \frac{A_1}{N} + \frac{A_2}{N^2} + \cdots\right).$$

Es erscheint möglich zu verlangen, daß $R = \mu \cdot N$ mit wachsendem N jedenfalls nicht verschwinde; das führt auf die Einschränkung:

$$(4) \qquad 0 < \sigma \leqq 1.$$

Die Bedingung $\lim \mu = 0$ hat zur Folge, daß $\sigma \neq 0$ ist; nach (2) ist genähert $\lambda = \sigma$ und jedenfalls auch $0 < \lambda < 1$. Mit diesen Annahmen über $\mu(N)$, die für große N keiner unmittelbaren Beobachtung widersprechen können, reichen wir aus.

2. Führt man in die Bedingung für λ (§ 10 (20a)) $1 - h = \frac{Mg}{N_0}$ mit den erlaubten Vernachlässigungen ein, so kommt:

$$(5) \qquad \lambda \leqq 1 - \tfrac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{Mg}{4N_0}(6 + \mu_0 \operatorname{tg}\theta_0).$$

Für hinreichend große N_0 kommt das dritte Glied nicht in Betracht; wir haben also nur noch θ_0 abzuschätzen. Nun sollte (vgl. § 8 (4)) θ_0 entsprechend der Ungleichung

$$p_0 < \tfrac{1}{2}\mu'(a + \varrho \cos\theta_0)$$

bestimmt werden. Eine graphische Darstellung der Kurven $\varrho \sin\theta_0$ und $\frac{1}{2}\mu'(a + \varrho\cos\theta_0)$ zeigt, daß für kleine Werte für μ' auch θ_0 klein ausfällt, um so kleiner, je stärker die Ungleichheit besteht. Nimmt man für μ' einen Durchschnittswert $\frac{1}{2}$ an, so wird θ_0 so klein, daß $\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\theta_0}$ nahe bei 1 liegt, dagegen $\frac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0$ beträchtlich kleiner als 1 wird. Die Ungleichung (5) bedeutet dann keine allzustarke Einschränkung und ist sicher erfüllt, wenn man $\lambda = \sigma$ setzt.

Setzt man in § 10 (15) $h = 1 - \frac{Mg}{N_0}$ ein, so wird

$$k = 1 - \frac{3}{2}\frac{Mg}{N_0} - \frac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0 \quad \text{oder angenähert}$$

$$k = 1 - \tfrac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0,$$

d. h. k wird jedenfalls nicht viel kleiner als 1.

Unsere früher angestellten Abschätzungen sind nunmehr gesichert.

3. Jetzt ziehen wir das Resultat von § 9 (6) heran; es war:

$$(6) \qquad T = \frac{Mp_0 v_0}{p_0 R_0 + q_0(N_0 - Mg)} = \frac{(1-h)\mu_0 v_0}{g(h(1+h) + \mu_0^2)},$$

und wir hatten schon verlangt, daß $\varepsilon \equiv \frac{T}{\tau} < 1$ sein solle. Schreibt man $\varepsilon < 1$ beliebig vor, setzt $T = \varepsilon\tau$ in § 10 (17) ein und nimmt an, daß v_0 von der Größenordnung:

$$(7) \qquad v_0 \sim q_0 \frac{h(1+h) + \mu_0^2}{1+h}\sqrt{\frac{g}{hk(q_0 - a)}}$$

sei, was ja für v_0 keine allzustarke Einschränkung bedeutet, so folgt näherungsweise

$$(8) \qquad \varepsilon^2\delta = \frac{1-h}{1-h+\lambda(1+h)} \quad \text{oder} \quad \varepsilon^2\delta = \frac{1-h}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\frac{Mg}{N_0}.$$

Hierin steckt eine Bedingung für den Anfangsdruck N_0, und erst wenn auch noch diese erfüllt ist, stellt der Ausdruck T die Zeit dar, zu der die „Selbstsperrung" eintritt. Wir mußten, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen, eine Reihe von notwendigen Annahmen einführen, ohne darüber zu entscheiden, ob sie auch hinreichend seien. Jetzt schlagen wir den umgekehrten Weg ein, setzen diese Forderungen als erfüllt voraus und zeigen, wie alsdann die Rechnung verläuft.

4. Der Coulombsche Koeffizient ist für die berührenden Materialien gegeben; die Anfangslage θ_0 entspricht der Ungleichung

$$\sin\theta_0 \leqq \frac{1}{2}\mu'\frac{a+\varrho\cos\theta_0}{\varrho},$$

θ_0 fällt sehr klein aus. Den Anfangsdruck N_0 berechnen wir aus $p_0(1+h) = q_0\mu_0$, wo für große N eine Entwicklung von der Form:

$$\mu = \frac{c}{N^\sigma}\left(1 + \frac{A_1}{N} + \cdots\right)$$

gegeben ist. Wir dürfen die Lösung N_0 als sehr groß annehmen, sodaß $1-h = \frac{Mg}{N_0}$ und $\mu_0 = \mu(N_0)$ kleine Zahlen sind. Dann wird $k = 1 - \frac{1}{2}\mu_0 \operatorname{tg}\theta_0$ die Größenordnung 1 haben; angenähert wird $\lambda = -\left(\frac{N\frac{d\mu}{dN}}{\mu}\right) = \sigma$. Ferner muß N_0 so groß sein, daß sich der Quotient $\frac{Mg}{N_0}\frac{1}{2\lambda} \equiv \delta\varepsilon^2$ in zwei Zahlen zerlegen läßt, von denen $\varepsilon^2 < 1$, dagegen δ gegen 1 zu vernachlässigen ist. Alsdann bestimmt man ein Intervall τ aus:

$$\tau^2 = \delta \cdot \frac{p_0^2(1-h)[1-h+\lambda(1+h)]}{gh(q_0-a)k}$$

und beschränkt t auf das Gebiet $0 < t < \tau$. Die Variable t nimmt mit τ nur sehr kleine Werte an, sodaß während τ die Reaktionen N_0 und R_0, sowie der Winkel θ_0 konstant bleiben. Hat die Anfangsgeschwindigkeit dieselbe Größenordnung wie in (7), so sinkt sie zur Zeit $T = \varepsilon\tau < \tau$ auf Null herab, die Scheibe kommt in kürzester Zeit zur Ruhe, d. h. es tritt Selbstsperrung ein. Die alsdann stattfindende Bewegung interessiert uns hier nicht, wir wollten ja nur den Fall der Gleitreibung behandeln. Die Rechnung ist nur angenähert durchgeführt, da von vornherein keine spezielle Annahme über die Form des Reibungsgesetzes gemacht werden sollte. Eine genauere Durchführung hätte etwa an

die Gleichung (3) anzuknüpfen, kann aber nicht zu wesentlich verschiedenen Resultaten führen.

Das Ergebnis unserer Untersuchung können wir kurz so zusammenfassen: *Die v. Misessche Annahme stellt eine hinreichende Bedingung dar für die uneingeschränkte theoretische Brauchbarkeit eines stereodynamischen Reibungsgesetzes, wenigstens bei unserem allgemeinen Bewegungsproblem. Sie läßt der näheren, experimentell zu ermittelnden Form des Reibungsgesetzes einen weiten Spielraum. An einem Beispiel ist dann gezeigt, wie man ein Reibungsgesetz, der allgemeinen Forderung entsprechend, so annehmen kann, daß die Theorie auf die Selbstsperrung führt.*

Lebenslauf.

Ich, Julius Wellstein, bin geboren am 8. April 1888 zu Weißenburg i. E., besuchte von Ostern 1895 ab die städtische Volksschule zu Saarbrücken, von Ostern 1897 das dortige Kgl. Ludwigs-Gymnasium, das ich Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Reife verließ; seit dieser Zeit bin ich an der Kaiser-Wilhelms-Universität zu Straßburg i. E. immatrikuliert.

Vorlesungen und Übungen besuchte ich bei den Herren: Braun, Cohn, Epstein, Mandelstam, v. Mises, Reye, Schur, Simon, Thiele, Timerding, Weber, Wellstein.

Es sei mir gestattet, Herrn v. Mises, der diese Arbeit angeregt und mich bei ihrer Anfertigung durch seinen Rat unterstützt hat, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.